# Einige Probleme der Wahrscheinlichkeitsrechnung und geometrische Lösungswege

**Wolfgang Wertz , TU Wien**

## 1. Das Aufteilungsproblem

### 1.1

Zwei Spieler, $A$ und $B$, werfen abwechselnd einen Würfel. $A$ gewinnt, wenn die Augenzahl gerade ist, $B$ gewinnt, wenn sie ungerade ist, das heißt, bei jeder Runde haben beide Spieler die gleiche Gewinnwahrscheinlichkeit 1/2, das Spiel ist also *ausgeglichen* (*fair*). Derjenige Spieler, der als erster 6 Runden gewonnen hat, gewinnt das gesamte Spiel und erhält den gesamten Einsatz (Preis) $g$. Das Spiel wird nach 8 Runden, von denen $A$ fünf und $B$ drei Runden gewonnen hat, vorzeitig abgebrochen. Wie ist der Gewinn gerecht aufzuteilen?

### 1.2

Dieses sehr naheliegende Problem wurde zunächst vom Minoritenmönch Fra Luca dal Burgo PACIOLI (1445?-1514), der übrigens mit Leonardo da VINCI befreundet war, in seinem 1487 erschienen Werk „Summa da arithmetica, geometria, proportionis et proportionalita“ untersucht und (falsch) gelöst. Die Fragestellung dürfte aber wesentlich älter sein: Ø. ORE nennt ein italienisches Manuskript aus dem Jahre 1380, in dem das Aufteilungsproblem erwähnt wird - möglicherweise geht dieses sogar auf ältere, arabische Ursprünge zurück.

Eingehend wurde das Problem auch von Niccolò TARTAGLIA (um 1499 - 1557) im „General trattato di numeri et misura“ (1556) sowie von Gerolamo CARDANO (1501-1576) in seinem erst 1663 (!) veröffentlichten Werk „Liber de ludo aleae“ behandelt; CARDANO's Buch war als Art Handbuch für Spieler gedacht, enthält bereits einfache kombinatorische Überlegungen und im wesentlichen den LAPLACE'schen Wahrscheinlichkeitsbegriff.

Die vorgeschlagenen Lösungen erweisen sich durchwegs als falsch. Erst in dem durch den bekannten Glücksspieler Antoine GOMBAULD, Chevalier de MERÉ (1607 - 1684) angeregten berühmten Briefwechsel zwischen Blaise PASCAL (1623 - 1662) und Pierre FERMAT (1601 - 1665) findet sich im Jahre 1654 eine richtige Lösung. ([4] enthält eine Übersetzung dieses Briefwechsels).

Die falschen Lösungsansätze gehen von der Anzahl der gewonnen Runden aus und übersehen dabei, daß es nur auf das Gesamtspiel ankommt. Eine naive Lösung führt daher auf die Aufteilung 5:3; TARTAGLIA kommt mit einer eher umständlichen Begründung auf 2:1.

## 1.3

PASCAL (oder FERMAT?) erkennt im Grunde, daß es sich um ein wahrscheinlichkeitstheoretisches Problem handelt und argumentiert wie folgt: Der Gewinn ist gemäß den Chancen, daß die Spieler, ausgehend vom gegebenen Spielstand 5:3, das Spiel gewinnen, aufzuteilen. Nach drei weiteren Spielen wäre das Spiel jedenfalls entschieden. Bezeichnet $\alpha$ bzw. $\beta$ , daß Spieler $A$ bzw. $B$ die betreffende Runde gewinnt, so sind folgende 8 Möglichkeiten für drei fiktive Runden gleichwahrscheinlich:

$$\begin{array}{cccc} \alpha\alpha\alpha & \alpha\beta\alpha & \beta\alpha\alpha & \beta\beta\alpha \\ \alpha\alpha\beta & \alpha\beta\beta & \beta\alpha\beta & \beta\beta\beta \end{array}$$

Dabei führt nur die letzte Möglichkeit, „$\beta\beta\beta$ “, zu einem Gewinn von $B$, das heißt, die Wahrscheinlichkeit, daß $A$ gewinnt, beträgt $\frac{7}{8}$, die daß $B$ gewinnt, $\frac{1}{8}$, sodaß der Gewinn im Verhältnis 7:1 aufzuteilen ist.

## 1.4

Johann BERNOULLI (1667 -1748) verallgemeinerte das Problem für den Fall ungleicher Gewinnchancen. Diesen Fall lege ich auch in der Folge zugrunde:

Gegeben sei ein Spiel, in dem pro Runde Spieler $A$ mit Wahrscheinlichkeit $p$ und Spieler $B$ mit Wahrscheinlichkeit $q := 1-p$ $(0 < p < 1)$ gewinnt. Derjenige gewinnt das Spiel, der als erster $k$ Runden gewonnen hat. Das Spiel wird vorzeitig unterbrochen, wenn $A$ $a$ Runden und $B$ $b$ Runden gewonnen hat $(0 \leq a, b < k)$. Wie ist der Gewinn (Preis) aufzuteilen?

## 1.5

Christian HUYGENS (1625 - 1695) hat das entsprechende Problem für drei Spieler betrachtet ( „De ratiociniis in ludo aleae “, 1657); im Schrifttum wird immer wieder behauptet (z.B. [5] ), daß ihm Priorität zukommt. Tatsächlich löst aber bereits PASCAL diese Frage in einem Brief an FERMAT vom 24. August 1654. Verallgemeinerungen auf endlich viele Spieler sind leicht möglich.

## 1.6

Mit dem Aufteilungsproblem haben sich also zumindest zwei Jahrhunderte lang hervorragende Mathematiker erfolglos beschäftigt, obgleich es aus heutiger Sicht recht einfach erscheint; doch erst die neueren Methoden und Modellbildungen, die insbesondere auf den am Moskauer Steklow-Institut wirkenden Andrej N. KOLMOGOROW (1903 - 1987) zurückgehen und in seinem grundlegenden Werk „Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie“(Springer, Berlin, 1933) dargestellt sind, ermöglichen diese Sicht der Dinge. Die ein halbes Jahrtausend währende Entwicklung mahnt uns, nicht die Gnade der späten Geburt zu mißbrauchen, um auf vergangenes Wirken überheblich herabzublicken - das überlassen wir Mathematiker lieber anderen Fakultäten -, sondern aus dem Verständnis früher vorhandener Schwierigkeiten zu lernen.

Gerade solche Überlegungen sind wesentlicher Bestandteil der Allgemeinbildung und sollten daher in den Unterricht einbezogen werden; deswegen, aber auch aus einer Reihe weiterer Gründe eignet sich das Aufteilungsproblem m. E. für den Unterricht, besonders im Rahmen des Wahlpflichtfaches:

1. Zunächst die überraschende Erkenntnis, daß es sich um ein wahrscheinlichkeitstheoretisches Problem handelt.

2. Die Einfachheit der Fragestellung und der Lösungsmethoden, insbesondere die Möglichkeit über das Problem hinausreichender geometrischer Betrachtungsweisen.

3. Naheliegende Verallgemeinerungen in verschiedener Richtung.

4. Das Aufzeigen eines langwierigen Entwicklungsprozesses, der Verfänglichkeit vordergründiger Lösungsversuche und der Bedeutung angemessener Zugänge, somit eine Motivation für eine ordentliche Modellbildung.

5. Eine Reihe vom Ansatz her unterschiedlicher Lösungswege.

In der Folge gebe ich daher drei verschiedene Lösungen der verallgemeinerten Fassung des Aufteilungsproblems. Die Zugrundelegung der Fassung **1.4** macht das Problem wohl durchsichtiger als die ausschließliche Betrachtung des Falles $p = 1/2$.

## 1.7

**Erste Lösung** (folgt im wesentlichen der PASCAL'schen Lösung **1.3**):

$A_{a,b}$ bezeichne das Ereignis, daß $A$ gewinnt, wenn $A$ bereits $a$ und $B$ $b$ Runden gewonnen hat und

$C_{i,n}$ das Ereignis, daß $A$ genau $i$ von $n$ Runden gewinnt ( $0 \le i \le n$ ). Ferner sei

$$s := k - a \qquad t := k - b. \tag{1}$$

Nach $2k - 1$ Runden wäre das Spiel jedenfalls entschieden; es werden daher noch $2k - 1 - a - b = s + t - 1$ fiktive Runden angenommen, von denen $A$

zumindest $s$ gewinnen muß, um das Spiel zu gewinnen. Es gilt also

$$A_{a,b} = \bigcup_{i=s}^{s+t-1} C_{i,s+t-1}, \tag{2}$$

wobei die $C_{i,s+t-1}$ für verschiedene $i$ einander ausschließen. Weil die Runden aufgrund der Spielregeln als unabhängig angenommen werden können, gilt aufgrund der Formel für die Binomialverteilung

$$W(C_{i,n}) = \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot q^{n-i}, \tag{3}$$

daher

$$\left.\begin{aligned} &w_{a,b} := W(A_{a,b}) = \textstyle\sum_{i=s}^{s+t-1} \binom{s+t-1}{i} \cdot p^i \cdot q^{s+t-1-i} = \\ &= p^s \cdot q^{t-1} \cdot \textstyle\sum_{j=0}^{t-1} \binom{s+t-1}{s+j} \cdot (\frac{p}{q})^j, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

wie die Substitution $j := i - s$ zeigt und wobei $s, t$ wie in 1 definiert sind. Die Gewinnwahrscheinlichkeit von $B$ ist daher $1 - w_{a,b}$, und dementsprechend ist der Gewinn aufzuteilen.

Für $p = q = \frac{1}{2}$ nimmt die Formel die einfachere Gestalt

$$w_{a,b} = 2^{-(s+t-1)} \cdot \sum_{j=0}^{t-1} \binom{s+t-1}{s+j} \tag{5}$$

Eine analoge Berechnung der Gewinnwahrscheinlichkeit $\widetilde{w_{a,b}}$ von $B$ und eine einfache Rechnung ergibt, daß in diesem Falle ($p = \frac{1}{2}$ !) der Gewinn im Verhältnis

$$\sum_{j=0}^{t-1} \binom{s+t-1}{s+j} : \sum_{i=0}^{s-1} \binom{s+t-1}{t+i} \tag{6}$$

aufzuteilen ist.

## 1.8

**Negative Binomialverteilung.**

Unter einem *Bernoulli-Schema* versteht man das Modell für $k$ ( $k \in \mathbb{N}$ ) unabhängige Versuchen unter gleichen Bedingungen, wobei ein bestimmtes Ereignis $A$ mit Wahrscheinlichkeit $W(A) = p$ $(0 < p < 1)$ eintritt. Ein *Bernoulli-Prozeß* ist eine Folge derartiger Versuche. Das Eintreten von $A$ wird mit „1" verschlüsselt und als *„Erfolg"*, das Nichteintreten von $A$ (also das Eintreten des Komplementärereignisses $A^c$ ) als *„Mißerfolg"* bezeichnet und mit „0" verschlüsselt.

Es bezeichne $T_r$ die Anzahl der Versuche bis zum $r-ten$ Erfolg, und $U_r$ die Anzahl der Mißerfolge vor dem $r-ten$ Erfolg, also $U_r = T_r - r$.

Die Verteilung von $U_r$ heißt *Pascal-Verteilung* oder *negative Binomial-Verteilung mit den Parametern r und p* $(0 < p < 1)$, kurz geschrieben als:
$U_r \sim \mathbf{Pc}_{r,p} = \mathbf{NB}_{r,p}$.

**Satz 1.1** :

$$p_{rm} := W[T_r = m] = \binom{m-1}{r-1} p^r q^{m-r} \qquad m \in \{r, r+1, \ldots\}, \tag{7}$$

$$p^*_{rn} := W[U_r = n] = \binom{n+r-1}{r-1} \cdot p^r q^n \qquad n \in \{0, 1, \ldots\}. \tag{8}$$

$$\mathbb{E}U_r = \frac{qr}{p} \qquad \mathbb{E}T_r = \frac{r}{p} \qquad und \qquad \mathbb{V}U_r = \mathbb{V}T_r = \frac{qr}{p^2}. \tag{9}$$

**Bemerkung**: Wegen $\binom{n}{a} = \binom{n}{n-a}$ läßt sich (8) auch so schreiben:

$$p^*_{rn} = \binom{n+r-1}{n} \cdot p^r q^n. \tag{10}$$

**Beweis:** Der $r-te$ Erfolg tritt genau beim $m-ten$ Versuch ein, wenn die unter den ersten $m-1$ Versuchen genau $r-1$ Erfolge (also $m-r$ Mißerfolge) aufgetreten sind, und beim $m-ten$ Versuch ein Erfolg eintritt. Da es $\binom{m-1}{r-1}$ Möglichkeiten gibt, die Erfolge auf $m-1$ Stellen aufzuteilen, und jede dieser Möglichkeiten Wahrscheinlichkeit $p^{r-1} \cdot q^{m-r} \cdot p$ hat, folgt (7) . (8) ergibt sich, indem man $n = m - r$ setzt.

Die Herleitung des Erwartungswertes übersteigt zweifellos den AHS-Stoff. - Zunächst zeige ich, daß durch (7) bzw. (8) eine Wahrscheinlichkeitsverteilung definiert wird:

Es sei $f(x) := (1-x)^{-r} \qquad 0 \le x < 1$.

$\Longrightarrow f^{(n)}(x) = (-r) \cdot (-r-1) \cdot \ldots \cdot (-r-n+1) \cdot (1-x)^{-r-n} \quad =$

$= \quad r \cdot (r+1) \cdot \ldots \cdot (r+n-1) \cdot (1-x)^{-r-n}$

Die Taylor-Entwicklung von $f$ um den Punkt 0 lautet:

$$f(x) = \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n, \text{, also}$$

$$(1-x)^{-r} = \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} \frac{r(r+1)\ldots(r+n-1)}{n!} \cdot x^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{r+n-1}{n} \cdot x^n.$$

Mit $x := q$ ergibt sich nach (10)

$$\sum_{m=r}^{\infty} p_{rm} = \sum_{n=0}^{\infty} p^*_{rn} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{r+n-1}{n} \cdot p^r \cdot q^n =$$

$$= p^r \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{r+n-1}{n} \cdot q^n = p^r \cdot (1-q)^{-r} = 1. \qquad (11)$$

Differenzieren der Formel (11) nach $p$ ergibt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r \cdot \binom{r+n-1}{n} \cdot p^{r-1} \cdot (1-p)^n - \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \binom{r+n-1}{n} \cdot p^r \cdot (1-p)^{n-1} = 0.$$

Die erste Summe ist gleich

$$\frac{r}{p} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} p^*_{rn} = \frac{r}{p} \cdot 1,$$

die zweite

$$= \frac{1}{1-p} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} np^*_{rn} = \frac{1}{1-p} \cdot \mathbb{E}U_r;$$

daraus folgt: $\frac{1}{1-p} \cdot \mathbb{E}U_r = \frac{r}{p}$ und damit die Behauptung für $\mathbb{E}U_r$. Wegen $T_r = U_r + r$ ergibt sich $\mathbb{E}T_r = \frac{(1-p)r}{p} + r = \frac{r}{p}$. Die Berechnung der Varianz erfolgt auf ähnliche Art. ✠

**Beispiel:** Eine Käferart $K$, die im Seewinkel vorkommt, weist eine besonders seltene Unterart $K_1$ auf. Der Anteil $p$ von $K_1$ an der Art $K$ soll ermittelt werden. Es ist nicht sinnvoll, eine fest vorgegebene Anzahl $n$ von Käfern $K$ zu fangen, die Anzahl $k$ der darunter befindlichen Käfer $K_1$ zu bestimmen und $p$ durch $\hat{p} := k/n$ zu schätzen, weil ein sehr kleines $k$ nicht aussagekräftig ist; so würde etwa $k = 0$ den unbrauchbaren Schätzwert $\hat{p} = 0$ liefern.

Ein kluger Biologe fängt daher solange Käfer $K$, bis er $r$ Käfer $K_1$ hat (dazu benötigt er $T_r$ Käfer $K$) und schätzt $p$ durch $r/T_r$ . Die Verteilung von $T_r - r$ ist $\mathbf{Pc}_{r,p}$, nach (9) muß er im Mittel $r/p$ Käfer fangen.

## 1.9

**Zweite Lösung des Aufteilungsproblems** mit Hilfe der negativen Binomialverteilung:

Ausgehend vom gegebenen Spielstand $a : b$ (vgl. **1.4** ) nehmen wir an, daß fikive Runden ad infinitum weitergespielt werden. $A$ gewinnt genau dann, wenn er von den nächsten $2k - a - b - 1 = s + t - 1$ Runden $k - a = s$ gewinnt (andernfalls hätte $B$ vorher zumindest $k - b = t$ Runden und damit das Spiel gewonnen). Also muß $W[T_s \leq s + t - 1]$ berechnet werden. Daher:

$$\left.\begin{aligned} w_{ab} &= \textstyle\sum_{i=s}^{s+t-1} W[T_s = i] = \sum_{j=0}^{t-1} W[U_s = j] = \\ &= p^s \cdot \textstyle\sum_{j=0}^{t-1} \binom{j+s-1}{s-1} \cdot q^j. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Der Nachweis, daß diese Formel tatsächlich mit (4) übereinstimmt, würde mühsame kombinatorische Überlegungen erfordern.

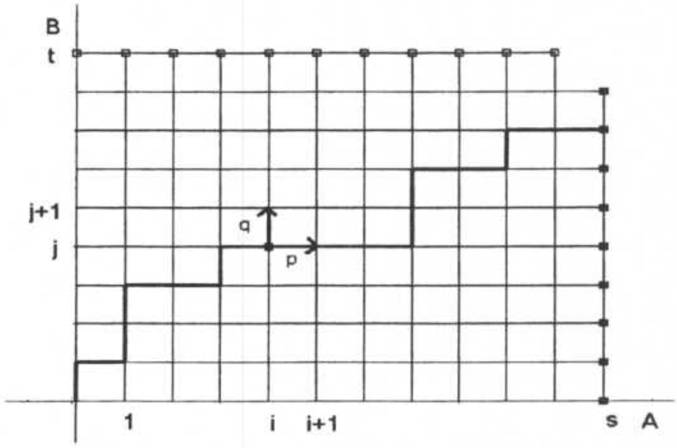


Abb. 1

## 1.10

### Dritte, geometrische Lösung des Aufteilungsproblems:

Das Spiel **1.4** werde wie folgt abgeändert:
$A$ benötige $s$ gewonnene Runden für den Sieg;
$B$ benötige $t$ gewonnene Runden für den Sieg.

In Abb. 1 wird jeder Gewinn von $A$ auf der Abszisse aufgetragen, jeder Gewinn von $B$ auf der Ordinate. $A$ gewinnt genau dann, wenn ein Pfad, der den Spielverlauf darstellt, in einem Punkt $(s, j)$ $(0 \leq j < t)$ endet, $B$, wenn er in $(i, t)$ $(0 \leq i < s)$ endet. $(s, t)$ kann nicht erreicht werden.

Es bezeichne

$$X_l := \begin{cases} 1 & \text{wenn } A \text{ die } l-\text{te Runde gewinnt,} \\ 0 & \text{wenn } B \text{ die } l-\text{te Runde gewinnt.} \end{cases} \tag{13}$$

Die Zufallsgrößen $X_l$ sind aufgrund der Spielregeln unabhängig. Ferner sei

$$Z_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{wenn der Pfad } (i, j) \text{ trifft,} \\ 0 & \text{wenn der Pfad } (i, j) \text{ nicht trifft.} \end{cases} \tag{14}$$

Für die $Z_{ij}$ gilt:

$$W[Z_{ij} = 1] = \binom{i+j}{i} p^i q^j \qquad \text{für } 0 \le i < s,\ 0 \le j < t,$$

daher (weil auch $Z_{s-1,j}$ und $X_{s+j}$ unabhängig sind)

$$\begin{aligned} W[Z_{sj} = 1] = W[Z_{s-1,j} = 1, X_{s+j} = 1] &= \binom{s-1+j}{s-1} p^{s-1}\, q^j\, p = \\ &= \binom{s-1+j}{s-1} p^s\, q^j \quad \text{für } 0 \le j < t, \end{aligned} \tag{15}$$

und

$$\begin{aligned} W[Z_{it} = 1] = W[Z_{i,t-1} = 1, X_{t+i} = 0] &= \binom{i+t-1}{t-1} p^i\, q^{t-1}\, q = \\ &= \binom{i+t-1}{t-1} p^i\, q^t \quad \text{für } 0 \le i < s, \end{aligned} \tag{16}$$

$$W[Z_{st} = 1] = 0.$$

Das ergibt:

$$W[A \text{ gewinnt}] = \sum_{j=0}^{t-1} W[Z_{sj} = 1] = p^s \cdot \sum_{j=0}^{t-1} \binom{s-1+j}{s-1} \cdot q^j \tag{17}$$

und

$$W[B \text{ gewinnt}] = \sum_{i=0}^{s-1} W[Z_{it} = 1] = q^t \cdot \sum_{i=0}^{s-1} \binom{i+t-1}{t-1} \cdot p^i. \tag{18}$$

Die Spieldauer ist gegeben durch $Z = \sum_{i=0}^{s-1} \sum_{j=0}^{t-1} Z_{ij}$, denn $s$ bzw. $t$ wird genau einmal erreicht, und $Z_{00} = 1$ ist abzuziehen. Das ergibt eine mittlere Spiellänge von

$$\mathbb{E}Z = \sum_{i=0}^{s-1} \sum_{j=0}^{t-1} \mathbb{E}Z_{ij} = \sum_{i=0}^{s-1} \sum_{j=0}^{t-1} W[Z_{ij} = 1]. \tag{19}$$

Im Falle $s = t = k$ kann man zeigen, daß $\mathbb{E}Z$ für $p = 1/2$ maximal wird, also ist die größte Spiellänge zu erwarten, wenn die beiden Spieler gleiche Gewinnchancen haben.

Die Lösung der Aufteilungsproblems ergibt sich, indem man $s := k - a$ und $t := k - b$ setzt, und zwar in Gestalt von (12).

Diese geometrische Lösung stellt in anschaulicher Weise des gesamten Spielverlauf dar.

# 2. Das Banach'sche Streichholzproblem

## 2.1

Der berühmte, in Lemberg wirkende Funktionalanalytiker Stefan BANACH (1892 - 1945) war ein leidenschaftlicher Raucher. Daher trug er stets zwei Schachteln mit ursprünglich je $n$ Streichhölzern bei sich. Zum Anzünden einer Zigarette wählte er jeweils zufällig eine der beiden Schachteln.

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $p_k$ für folgendes Ereignis $A_k$ ? Er entdeckt, daß eine der Schachteln, $S_1$ und $S_2$, leer ist, und in der anderen befinden sich genau $k$ ($k = 0, 1, \ldots, n$ ) Streichhölzer.

2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $\widetilde{p_k}$ für folgendes Ereignis $B_k$ ? Er entnimmt das letzte Streichholz einer der Schachteln, und in der anderen befinden sich genau $k$ ($k = 1, \ldots, n$ ) Streichhölzer.

3. Es bezeichne die Zufallsgröße $X$ die Anzahl der in der anderen Schachtel vorrätigen Streichhölzer, wenn er bemerkt daß die eine leer ist. Wie groß ist $\mathbb{E}X$?

4. Entsprechend sei $\widetilde{X}$ definiert: die Anzahl der Streichhölzer in der anderen Schachtel, wenn er das letzte der einen Schachtel entnimmt. Wie groß ist $\mathbb{E}\widetilde{X}$?

5. Wieviele Streichhölzer werden im Mittel verbraucht, bis eine der Schachteln leer ist bzw. Banach dies bemerkt?

6. Für welche Werte von $k$ ist $p_k$ bzw. $\widetilde{p_k}$ am größten?

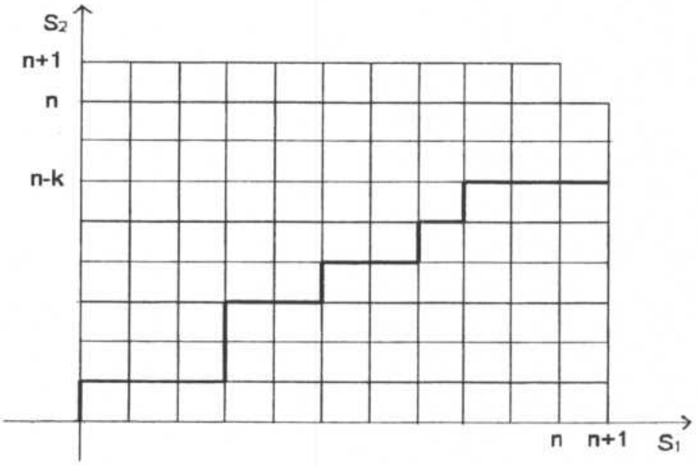


Abb. 2

## 2.2

Lösungen von 1. und 2. lassen sich in ähnlicher Weise wie **1.10** geben. Es sind auch Lösungen mit Hilfe der Pascal-Verteilung u. dgl. möglich; die geometrische Lösung erleichtert aber den Einblick in die Fragestellung beträchtlich. - Beachten Sie übrigens den wesentlichen Unterschied der Probleme 1. und 2.; hier erweist sich eine genaue Formulierung der Aufgabestellung als entscheidend!

Es werden auf der Abszisse von Abb. 2 die aus $S_1$ entnommenen, auf der Ordinate die aus $S_2$ entnommenen Streichhölzer aufgetragen. Damit in einer Schachtel $k$ Streichhölzer übrigbleiben, müssen vorher aus ihr $n-k$ entnommen worden sein. In der Bezeichnung von (14) gilt daher:

$$p_k = W[Z_{n+1,n-k}=1] + W[Z_{n-k,n+1}=1].$$

Einsetzen von (15) bzw. (16) liefert

$$p_k = \binom{2n-k}{n} \cdot 2^{-(2n-k)} \qquad \text{für } k = 0,1,\ldots,n \tag{20}$$

Eine entsprechende Überlegung ergibt unter Benützung von (20) (mit $k=0$)

$$\widetilde{p_k} = W[Z_{n,n-k}=1] + W[Z_{n-k,n}=1] =$$

$$= \binom{2n-k-1}{n-1} \cdot 2^{-(2n-k-1)} \qquad \text{für } k = 1,\ldots,n. \tag{21}$$

## 2.3

Für die Quotienten gilt

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{\binom{2n-(k+1)}{n}}{2^{2n-k-1}} \cdot \frac{2^{2n-k}}{\binom{2n-k}{n}} = 2 \cdot \frac{(2n-k-1)!}{n!(n-k-1)!} \cdot \frac{n!(n-k)!}{(2n-k)!} =$$

$$= 2 \cdot \frac{n-k}{2n-k} \qquad \text{für} \quad k = 0,1,\ldots,n-1 \tag{22}$$

$$\Rightarrow \qquad (2n-k)\cdot p_{k+1} = (2n-2k)\cdot p_k$$

$$\Rightarrow \qquad 2n\cdot p_{k+1} - (k+1)\cdot p_{k+1} + p_{k+1} = 2n\cdot p_k - 2k\cdot p_k$$

Aufsummieren über $k = 0,1,\ldots,n-1$ ergibt

$$2n\sum_{k=0}^{n-1} p_{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)p_{k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} p_{k+1} =$$

$$= 2n\cdot\sum_{k=0}^{n-1} p_k - 2\cdot\sum_{k=0}^{n-1} kp_k$$

Änderung des Summationsindex, Subtraktion gleicher Terme und $\sum_{k=0}^{n} p_k = 1$ (weil die $p_k$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung definieren) liefert

$$np_n - (2n+1)p_0 + 1 = -\sum_{k=0}^{n-1} kp_k$$

und daher

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=0}^{n} kp_k = (2n+1)p_0 - 1 = \mathbf{(2n+1)} \cdot \binom{\mathbf{2n}}{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{2^{-2n} - 1} \tag{23}$$

In entsprechender Weise ergibt sich

$$\frac{\widetilde{p_{k+1}}}{\widetilde{p_k}} = 2 \cdot \frac{(n-k)}{2n-k-1} \tag{24}$$

und

$$\mathbb{E}\widetilde{X} = \mathbf{(2n-1)} \cdot \binom{\mathbf{2n}}{\mathbf{n-1}} \cdot \mathbf{2^{-2(n+1)} - 1}. \tag{25}$$

## 2.4

Für die Anzahl $Z$ der verbrauchten Zündhölzer gilt $Z = n + (n - X)$ und daher

$$\mathbb{E}Z = 2n - \mathbb{E}X = 2n + 1 - (2n+1) \cdot \binom{2n}{n} \cdot 2^{-2n} \tag{26}$$

Zur Berechnung der maximalen Wahrscheinlichkeit $p_{k_0}$ dient folgende Darstellung:

$$p_{k_0} = \frac{p_{k_0}}{p_{k_0-1}} \cdot \frac{p_{k_0-1}}{p_{k_0-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{p_1}{p_0} \cdot p_0 \qquad \text{für} \quad k_0 = 1, \ldots, n \tag{27}$$

Gilt nun

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \leq 1 \qquad \text{für} \quad k \geq k_0 \qquad \text{und}$$

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \geq 1 \qquad \text{für} \quad k \leq k_0,$$

so ist $p_{k_0}$ maximal. Wegen (22) ist aber

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} = 2 \cdot \frac{n-k}{2n-k} \leq 1$$

genau dann, wenn $k \geq 0$ ist, daher ist $p_k$ für $k = 0$ am größten, und dieser Wert ist $p_0 = \binom{2n}{n} \cdot 2^{-2n}$ . Weil aber $\frac{p_1}{p_0} = 1$ ist, folgt $p_1 = p_0$ , also liefert auch $k = 1$ ein Maximum. Mit anderen Worten: Wenn Banach auf eine leere Schachtel stößt, ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die andere kein Zündholz mehr enthält, sowie diejenige, daß sie noch eines enthält, am größten.

Das Maximierungsproblem für $\widetilde{p_k}$ ergibt gemäß (23) den Wert $k_0 = 1$, damit ist $\widetilde{p_1} = \binom{2n-2}{n-1} \cdot 2^{-(2n-2)}$ der maximale Wert.

## 2.5

Aus der Tatsache, daß die $p_k$ $(k = 0, \dots, n)$ und die $\widetilde{p_k}$ $(k = 1, \dots, n)$ Wahrscheinlichkeitsverteilungen definieren, folgen die anders nur mühsam herleitbaren kombinatorischen Formeln

$$\sum\nolimits_{k=0}^{n} \binom{2n-k}{n} \cdot 2^{-(2n-k)} = 1 \tag{28}$$

und

$$\sum\nolimits_{k=1}^{n} \binom{2n-k-1}{n-1} \cdot 2^{-(2n-k-1)} = 1. \tag{29}$$

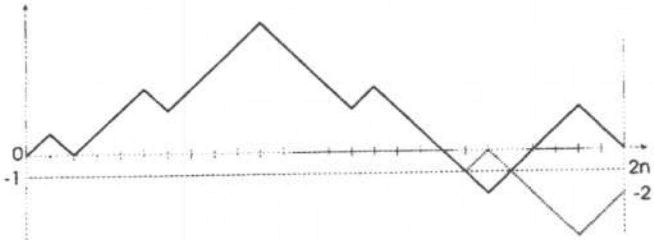


Abb. 3

# 3. Das André'sche Spiegelungsprinzip

## 3.1 Beispiel

Bei einer Wahl erhalten zwei Kandidaten, $A$ und $B$, die gleiche Stimmenanzahl $n$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß $A$ während der Auszählung stets mindestens soviele Stimmen wie $B$ aufweist?

Auf der Abszisse der Abb. 3 ist der Zeitpunkt $i = 0, 1, \dots, 2n$ der Auszählung aufgetragen Die Pfade, welche die Auszählung beschreiben, ergeben sich so: Zu jedem Zeitpunkt $i$ wird der Stimmenüberschuß von $A$ angegeben. Jeder solche Pfad ist gleichwahrscheinlich, denn jede Aufteilung von $n$ Stimmen von $A$ auf die $2n$ Stellen ist (unter vernünftigen Modellvoraussetzungen) gleichwahrscheinlich.

$E$ bezeichne das Ereignis „$A$ hat während der Auszählung stets mindestens soviele Stimmen wie $B$ ". $E$ tritt genau dann ein, wenn der Pfad nie die Abszisse unterschreitet. Das komplementäre Ereignis $E^c$ entspricht also denjenigen Pfaden, die einen Punkt $(k, -1)$ enthalten. Erreicht ein solcher Pfad zum ersten Male $-1$, so wird er an der Horizontalen in der Höhe $-1$ gespiegelt, endet somit bei $(2n, -2)$. Daher sind alle solchen Pfade abzuzählen: Ihre Anzahl ist $\binom{2n}{n-1}$, da sie $(n-1)$ -mal $+1$ und $(n+1)$ -mal $-1$ entsprechen.

$$\Rightarrow \quad W(E) = 1 - W(E^c) = 1 - \frac{\binom{2n}{n-1}}{\binom{2n}{n}} = 1 - \frac{\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} =$$

$$1 - \frac{n}{n+1} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n+1}}$$

## 3.2 Eine andere Formulierung dieses Beispiels:

An der Kassa des SV Mattersburg warten $2n$ Besucher, $n$ von ihnen haben nur einen 5-TEuro-Schein, die weiteren $n$ nur einen 10-er. Einen Eintrittskarte kostet 5 TEuro, zu Beginn ist in der Kassa kein Wechselgeld vorhanden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Besucher nacheinander abgefertigt werden können, ohne auf Nachlieferung von Wechselgeld warten zu müssen?

## 3.3 Ein realistischeres Beispiel:

Ein Automat, an denen es ein bestimmtes Produkt zum Preis von 1 Euro zu kaufen gibt, erlaubt auch den Einwurf einer 2-Euro-Münze, für die er dann das Restgeld herausgibt.

Am Anfang enthalte der Automat $a$ 1-Euro-Münzen. Von $n$ Kunden zahlen $k$ mit 1 Euro und $n-k$ mit 2 Euro. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Automat dabei nicht blockiert wird?

Die Lösung dieser Aufgabe ergibt sich aus:

## 3.4 Allgemeine Formulierung des Spiegelungsprinzips:

$X_0, X_1, \ldots, X_n$ seien unabhängige Zufallsgrößen mit

$$W[X_i = 1] = W[X_i = -1] = \frac{1}{2} \qquad \forall i = 1, \ldots, n \tag{30}$$

$$X_0 = a \quad \text{mit} \quad a \in \mathbb{N}. \tag{31}$$

Ferner seien die Partialsummen definiert durch

$$Y_i = \sum\nolimits_{j=0}^{i} X_j \ = \ a + \sum\nolimits_{j=1}^{i} X_j. \tag{32}$$

$(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ sei eine Realisation von $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$, das heißt:
$x_0 = a, \quad x_i \in \{-1, 1\}$ für $i = 1, \ldots, n$ und $y_i = \sum_{j=0}^{i} x_j \ = \ a + \sum_{j=1}^{i} x_j$.

Jede lineare Interpolation der Punkte $(i, y_i)$ $(i = 0, \ldots, n)$ heißt *Pfad* und wird mit $\mathfrak{y} = (y_0, y_1, \ldots, y_n)$ bezeichnet. Ein jeder solcher Pfad beginnt im Punkte $(0, a)$ und endet in $(n, y_n)$. Insgesamt gibt es $2^n$ gleichwahrscheinliche Pfade, daher gilt $\forall\, \mathfrak{y} = (y_0, y_1, \ldots, y_n)$ :

$$W[\mathfrak{Y} = \mathfrak{y}] = W[Y_0 = y_0, Y_1 = y_1, \ldots, Y_n = y_n] = \frac{1}{2^n}. \tag{33}$$

Sei $b \in \mathbb{N}$ mit $|b - a| \leq n$ und $b - a + n$ gerade. Dann gilt für die bedingte Wahrscheinlichkeit eines Pfades $\mathfrak{y}$, unter der Bedingung, daß dieser im Punkte $(n, b)$ endet:

$$W[\mathfrak{Y} = \mathfrak{y} | Y_n = b] = \frac{W[\mathfrak{Y} = \mathfrak{y}, Y_n = b]}{W[Y_n = b]} =$$

$$W[\mathfrak{Y} = \mathfrak{y} | Y_n = b] = \frac{W[X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n, a + \sum_{i=1}^{n} X_i = b]}{W[a + \sum_{j=1}^{n} X_i = b]} =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{falls } \sum_{i=1}^{n} x_i \neq b - a. \\ \dfrac{(\frac{1}{2})^n}{\binom{n}{\frac{b-a+n}{2}} (\frac{1}{2})^n} = \dfrac{1}{\binom{n}{\frac{b-a+n}{2}}} & \text{andernfalls} \end{cases}, \tag{34}$$

weil $\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{n} X_i + n)$ binomialverteilt mit dem Parameter $\frac{1}{2}$ ist.

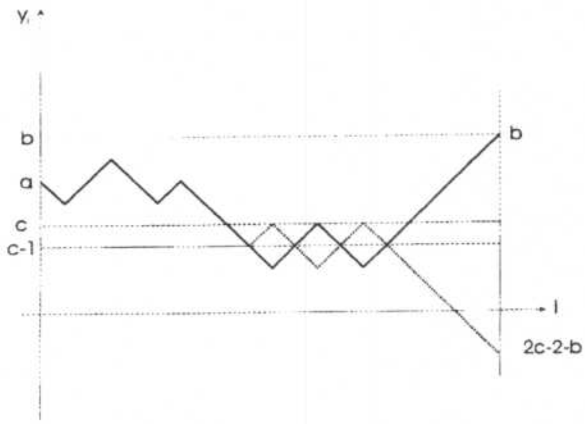


Abb. 4

Es sei $c \in \mathbb{N}$ mit $c < \min(a, b)$ ; gesucht ist

$$w_b(a, c; n) := W[\min_{i=1,\ldots,n} Y_i \geq c | Y_n = b].$$

Wenn für $\mathfrak{y}$ gilt: $\min_{i=1,\ldots,n} y_i < c$ , dann folgt:

$$\exists T_{\mathfrak{y}} := \min\{t \in \{1, \ldots, n\} : y_0, \ldots, y_{t-1} \geq c\ ,\ y_t < c\}$$

( $T_{\mathfrak{y}}$ definiert übrigens eine *Stoppzeit* , vgl. [6]) . Nun wird jeder Pfad $\mathfrak{y}$ mit $\min_{i=1,\ldots,n} y_i < c$ von $T_{\mathfrak{y}}$ weg an der Waagrechten in der Höhe $c - 1$ gespiegelt, sodaß ein Pfad $\mathfrak{y}^*$ entsteht:

$$\left.\begin{array}{ll} y_i^* = y_i & \forall i \leq T_{\mathfrak{y}} \\ y_i^* = 2c - 2 - y_i & \forall i > T_{\mathfrak{y}}. \end{array}\right\} \tag{35}$$

Wenn der Pfad $\mathfrak{y}$ im Punkte $(n, b)$ endet , so endet $\mathfrak{y}^*$ in $(n, 2c - 2 - b)$, d.h. jedem Pfad, der in $(n, b)$ endet und $c$ unterschreitet, wird somit genau ein Pfad, der in $(n, 2c - 2 - b)$ endet, zugeordnet.Es bleibt daher die Anzahl dieser Pfade zu bestimmen.

Bezeichnt $\xi$ die Anzahl der $+1$ und $\eta$ die der $-1$, die notwendig sind, um von $(0, a)$ nach $(n, 2c - 2 - b)$ zu gelangen, so muß gelten:

$$\begin{aligned} \xi + \eta &= n \\ a + \xi - \eta &= 2c - 2 - b. \end{aligned}$$

daher folgt:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{n}{2} - \frac{a+b}{2} + c - 1 \\ \eta &= \frac{n}{2} + \frac{a+b}{2} - c + 1. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\mathbf{w_b(a, c; n) = 1 - \frac{\binom{n}{\frac{n}{2} - \frac{a+b}{2} + c - 1}}{\binom{n}{\frac{b-a+n}{2}}}}. \tag{36}$$

## 3.5

Im Falle $c = 0$ ergibt dies:

$$w_b(a,0;n) = 1 - \frac{(\frac{n-b+a}{2})\cdot(\frac{n-b+a}{2}-1)\cdot\ldots\cdot(\frac{n-b-a}{2})}{(\frac{n+b+a}{2}+1)\cdot(\frac{n+b+a}{2})\cdot\ldots\cdot(\frac{n+b-a}{2}+1)}. \tag{37}$$

(37) beantwortet die in **3.3** gestellte Frage; dabei ist $b := a + 2k - n$ zu setzen. (37) erhält dann die einfachere Gestalt

$$w_{a+2k-n}(a,0;n) = 1 - \frac{(n-k)\cdot(n-k-1)\cdot\ldots\cdot(n-k-a)}{(k+a+1)\cdot(k+a)\cdot\ldots\cdot(k+1)}. \tag{38}$$

## 3.6

Eine aktuellere Formulierung: In einem großen Lande finden Präsidentenwahlen statt, wobei dem Kandidaten $B$ aufgrund des Einfusses der Erdölindustrie auf die Wahlbehörden von Anfang an $a$ Stimmen gutgeschrieben werden. $B$ wird von $k$ Wählern gewählt, Kandidat $A$ erhält $n - k$ Stimmen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß während der Auszählung immer $B$ führt und diejenige, daß $B$ nie hinter $A$ liegt? Gefragt ist also $w_{a+2k-n}(a,1;n)$ bzw. $w_{a+2k-n}(a,0;n)$.

## 3.7 Zufällige Struktur der Warteschlange in 3.3:

Jeder der $n$ Kunden verfüge mit Wahrscheinlichkeit $p$ $(0 < p < 1)$ über eine 1-EuroMünze und mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ nur über eine 2-Euro-Münze. $H_k$ bezeichne das Ereignis, daß genau $k$ Kunden eine 1-Euro-Münze einwerfen und $E^{(n)}$ das Ereignis, daß der Automat nie blockiert wird, weil er nicht wechseln kann.

$$\Rightarrow \quad W(H_k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

und nach dem Satz von der vollständigen Wahrscheinlichkeit

$$W(E^{(n)}) = \sum\nolimits_{k=0}^{n} W(E^{(n)}|H_k)\cdot W(H_k) =$$

$$\sum\nolimits_{k=\lceil\frac{n-a}{2}\rceil}^{n} (1 - w_{a+2k-n}(a,0;n))\cdot\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \tag{39}$$

($\lceil\alpha\rceil$ bezeichnet die größte ganze Zahl$\leq \alpha$).

Ist auch die Anzahl der Kunden eine Zufallsgröße $N$, und bezeichnet $E$ das Ereignis, daß der Automat nicht blockiert wird, so folgt:

$$W(E) = \sum_{k=1}^{\infty} W(E|N = n) \cdot W(N = n) + W(N = 0) = \sum_{k=1}^{\infty} W(E^{(n)}) \cdot W(N = n) + W(N = 0) \qquad (40)$$

Eine oft vernünftige Annahme ist, $N$ als Poisson-verteilt vorauszusetzen.

Es ist bemerkenswert, daß zwar der Einfluß der ersten Annahme auf $W(E)$ groß ist, hingegen die Zufälligkeit der Kundenzahl (etwa unter der Annahme der Poisson-Verteilung) sich nicht so stark auswirkt. Ausführlichere Berechnungen zu dieser Frage finden sich z. B im Buche [1].

## Literatur

[1] Andel, J.: *Mathematics of Chance*. J. Wiley, New York, 2001.

[2] Foata, D.; Fuchs, A.: *Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Birkhäuser, 1999.

[3] Pfanzagl, J.: *Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung*. W. de Gruyter, Berlin, 1990.

[4] Smith, D.E.: *A Source Book in Mathematics*, Vol. 2. 2. Auflage: Dover, New York, 1959

[5] Székely, G.: *Paradoxa*. Verl. Harri Deutsch, Thun und Frankfurt, 1990.

[6] Wertz, W.: Wie verbessere ich meine Gewinnerwartung? *Didaktikhefte* **34** (2002), 146 - 162.

Anschrift des Verfassers:

*Univ.-Prof. Dr. Wolfgang WERTZ*
*Institut für Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie*
*TU Wien*
*Wiedner Hauptstraße 8-10/E107*
*A-1040 WIEN*